Colle du 26 mars: Révisions d'algèbre

21.1 Première série

Exercice 1: Soient A et B deux matrices symétriques définies positives d'ordre n. Montrer que $(det(A))^{1/n} + (det(B))^{1/n} \leq (det(A+B))^{1/n}$.

Exercice 2: Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que si p est un nombre premier impair, la réduction modulo p de $GL_n(\mathbb{Z})$ dans $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ restreinte à G est injective. En déduire qu'à isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 3: Quelle est l'image de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 4: *(Théorème des quatre carrés)*
1. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe a et b dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $1 + a^2 + b^2 = 0$.
2. *(Théorème de Minkowski)* Soit n un entier naturel non nul. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ convexe et symétrique par rapport à l'origine. On suppose que le volume de A est supérieur strictement à 2^n. Montrer que A contient un point à coordonnées entières.
3. Montrer que tout entier naturel s'écrit comme somme de quatre carrés parfaits.

21.2 Deuxième série

Exercice 1: Soit G un groupe tel que $\forall g \in G, g^2 = e$. Déterminer G à isomorphisme près.

Exercice 2: Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Pour quelles valeurs de k existe-t'il un sous-groupe de $GL_k(\mathbb{C})$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m$?

Exercice 3: Soit K un corps fini de cardinal q et de caractéristique différente de 2. Montrer qu'il existe exactement deux classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur K^n.

Exercice 4: *(Théorème de Chevalley-Warning)*
1. Soit $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. Soit $P \in \mathbb{F}_q[X_1, ..., X_n]$ un polynôme homogène de degré d tel que $0 < d < n$. On considère $S = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \left(1 - P(x)^{q-1}\right)$. En étudiant S, montrer que P admet un zéro dans $(\mathbb{F}_q)^n$ distinct de $(0, ..., 0)$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{F}_q[X_1, .., X_n]$ homogène de degré n dont le seul zéro est $(0, ..., 0)$. On admettra qu'il existe un corps fini à q^n éléments.

21.3 Troisième série

Exercice 1: Soient l_1, ..., l_n n formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{Z}^n$ tel que pour tout i on a $l_i(x) > 0$.

Exercice 2: Soit p un nombre premier. Soit $\mathbb{F}_{p^2}$ le corps à p^2 éléments. On considère l'application: $N : \mathbb{F}_{p^2} \to \mathbb{F}_{p^2}, x \mapsto x^{p+1}$. Quelle est l'image de F?

Exercice 3: Quels sont les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$?

Exercice 4: Soit E un espace hermitien de dimension 2. Soit f un endomorphisme de E. On définit le Hausdorffien de f par $H(f) = \{\langle x, f(x)\rangle | x \in E, \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$. On appelle disque elliptique l'ensemble des points situés à l'intérieur d'une ellipse (l'ellipse comprise). Montrer que $H(f)$ est un disque elliptique dont on déterminera le centre et les foyers, et que $H(f)$ est un disque elliptique dégénéré (ie un segment) si, et seulement si, f est normal.

21.4 Quatrième série

Exercice 1: Soit $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, où $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutent. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Exercice 2: Soient q et q' deux formes quadratiques sur un espace vectoriel complexe E. On suppose que $q^{-1}(\{0\}) = q'^{-1}(\{0\})$. Que dire de q et q'?

Exercice 3: Notons $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Soit p un nombre premier. Montrer que p divise $2F_p - F_{p-1} - 1$.

Exercice 4: **1.** Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, $(M_1, ..., M_m) \in G^m$ une base de $Vect(G)$, et $f : G \to \mathbb{C}^m$ l'application qui à $A \in G$ associe $(Tr(AM_i))$. Montrer que, si $f(A) = f(B)$, alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.
2. *(Théorème de Burnside)* On suppose que G est d'exposant fini, c'est-à-dire qu'il existe $N > 0$ entier tel que $A^N = I_n$ pour tout $A \in G$. Montrer que G est fini.